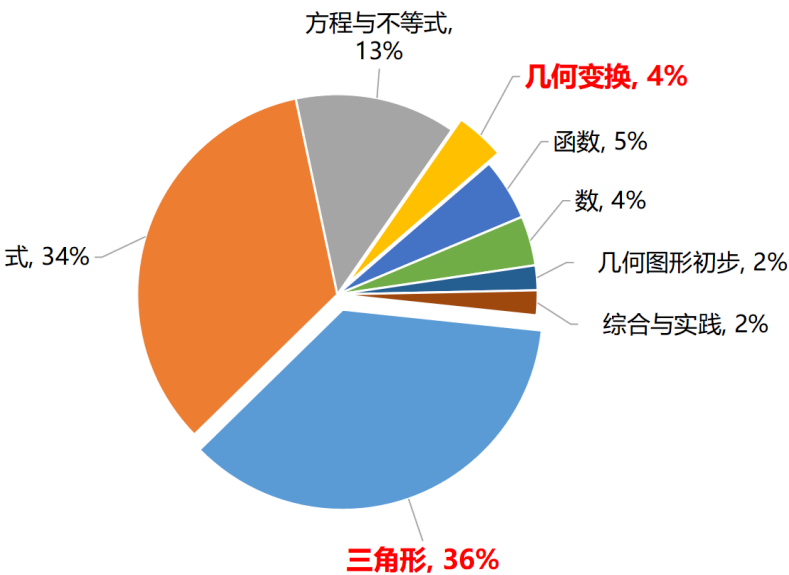


第1讲角平分线

三角形是所有图形的基础，属于人教版教材第十一、十二、十三章的重点内容，涉及到三角形、全等三角形、轴对称等知识点，体系结构较为完整，同时也是期中、期末考试的重要考察点。本模块《轴对称与角平分线初步》，重点包括角平分线、垂直平分线、等腰三角形，需要学生熟练掌握其性质与判定，总结一定的解题思路，同时为后续将军饮马、等边三角形等知识的学习奠定基础。

本模块难度中等，适用于轴对称与角平分线的专题学习，本模块分为角平分线、轴对称初步、等腰三角形讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼

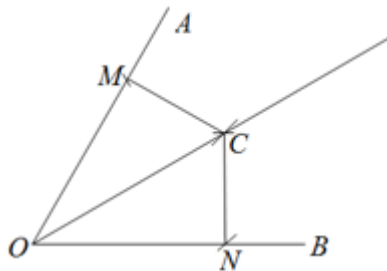


知识点	难度	考频
角平分线的性质	★★★	高
角平分线的判定	★★★	中
轴对称与轴对称图形	★★	高
垂直平分线的性质	★★★	高
垂直平分线的判定	★★★	中
等腰三角形的性质	★★★	高
等腰三角形的判定	★★★	高

一、作已知角的平分线

已知： $\angle AOB$ ．求作： $\angle AOB$ 的平分线．作法：

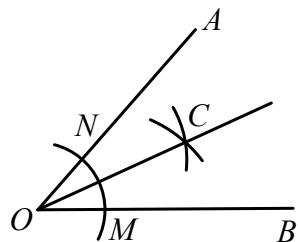
- (1) 以 O 为 圆心，适当长为 半径 画弧，交 OA 于 M ，交 OB 于 N ．
- (2) 分别以 点 M, N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C ．
- (3) 画射线 OC ．射线 OC 即为所求（如图所示）．



🧐 举个“栗”子

栗子1

1. 用直尺和圆规作一个角的平分线的示意图．如图所示，则能说明 $\angle AOC = \angle BOC$ 的依据是（ ）．

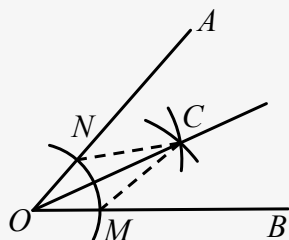


- | | |
|--------|--------------------|
| A. SSS | B. ASA |
| C. AAS | D. 角平分线上的点到角两边距离相等 |

【备注】作图依据问题，利用SSS进行判定

【答案】A

【解析】连接 NC, MC ．



在 $\triangle ONC$ 和 $\triangle OMC$ 中,

$$\begin{cases} ON = OM \\ NC = MC, \\ OC = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ONC \cong \triangle OMC$ (SSS) .

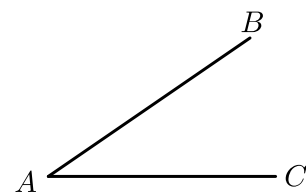
$\therefore \angle AOC = \angle BOC$.

故选A .

【标注】【知识点】作角平分线

2. 已知： $\angle CAB$.

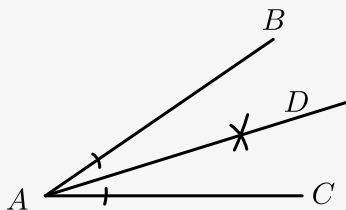
求作： $\angle CAB$ 的角平分线 AD . (尺规作图，保留作图痕迹，不写作法 .)



【备注】画图题，可以直接用此题讲解角平分线的画法

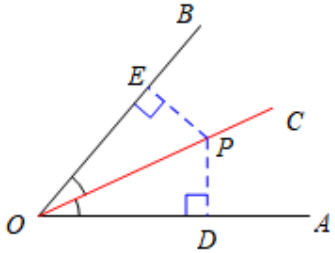
【答案】画图见解析 .

【解析】如图 AD 即所求 .



【标注】【知识点】作角平分线

二、角平分线的性质

性质定理	角的平分线上的点到角的两边的 <u>距离 相等</u> .
	【用符号语言表示】 $\because OP$ 平分 $\angle AOB$, $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E (已知) , $\therefore PD = PE$ (角的平分线上的点到角的两边距离相等) .

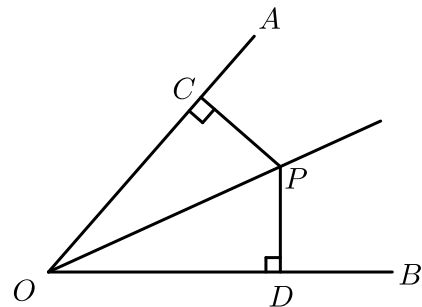
【备注】【角的平分线的性质的证明】

证明： $\because OP$ 平分 $\angle AOB$,
 $\therefore \angle AOP = \angle BOP$.
 $\because PD \perp OA$, $PE \perp OB$,
 $\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$.
 在 $\triangle POD$ 和 $\triangle POE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle POD = \angle POE \\ \angle PDO = \angle PEO , \\ OP = OP \end{cases}$$
 $\therefore \triangle POD \cong \triangle POE$ (AAS) ,
 $\therefore PD = PE$.

栗子2

3. 如图 , OP 为 $\angle AOB$ 的平分线 , $PC \perp OA$, $PD \perp OB$, 垂足分别是 C 、 D , 则下列结论错误的是 () .



- A. $PC = PD$ B. $\angle CPD = \angle DOP$ C. $\angle CPO = \angle DPO$ D. $OC = OD$

【备注】根据AAS的全等可得一系列边角的关系

【答案】B

【解析】 $\because OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线 , $PC \perp OA$, $PD \perp OB$, 垂足分别是 C 、 D ,
 $\therefore PC = PD$, 故A正确 ;
 在 $\text{Rt}\triangle OCP$ 与 $\text{Rt}\triangle ODP$ 中 ,

$$\begin{cases} OP = OP \\ PC = PD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle OCP \cong \text{Rt}\triangle ODP (\text{HL})$,

$\therefore \angle CPO = \angle DPO$, $OC = OD$, 故C、D正确.

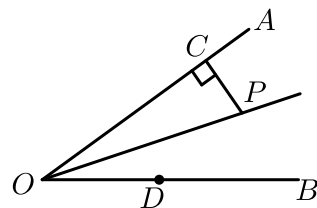
不能得出 $\angle CPD = \angle DOP$, 故B错误.

故选B.

【标注】【知识点】角分线性质定理

栗子3

4. 如图, OP 平分 $\angle AOB$, $PC \perp OA$ 于 C , 点 D 是 OB 上的动点, 若 $PC = 6\text{cm}$, 则 PD 的长可以是 () .



A. 3cm

B. 4cm

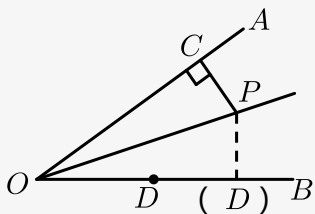
C. 5cm

D. 7cm

【备注】性质的直接应用, 到角两边的距离相等, 所以 PD 最小值为6

【答案】D

【解析】作 $PD \perp OB$ 于 D ,



$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$,

$PC \perp OA$,

$PD \perp OB$,

$\therefore PD = PC = 6\text{cm}$,

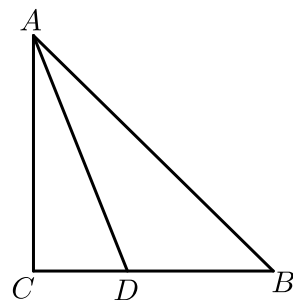
则 PD 的最小值是 6cm .

$\therefore$ 四个选项中, PD 的长可能是 7cm .

故选D.

【标注】【知识点】角分线性质定理

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，若 $BC = 16$ ，且 $BD : CD = 9 : 7$ ，则 D 到 AB 的距离为（ ）。



- A. 8 B. 9 C. 7 D. 6

【备注】 先利用比例求出 CD 的长，再将所求问题转化为 CD 的值

【答案】 C

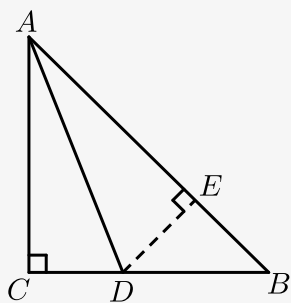
【解析】 如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，

$$\because BC = 16, \text{ 且 } BD : CD = 9 : 7,$$

$$\therefore CD = 16 \times \frac{7}{9+7} = 7,$$

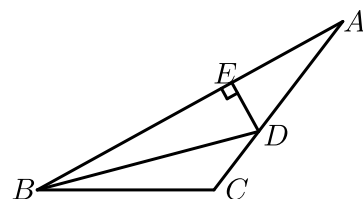
$\because \angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $DE = CD = 7$ 。

故选C。



【标注】 【知识点】角分线性质定理

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ，与 AC 交于点 D ， $DE \perp AB$ 于点 E ，若 $BC = 5$ ， $\triangle BCD$ 的面积为5，则 ED 的长为（ ）。



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

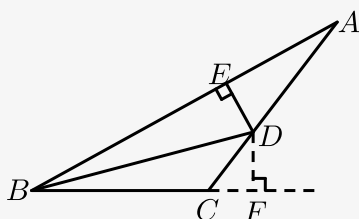
C. 2

D. 5

【备注】 面积相关问题，利用公式做高线，注意外部的高

【答案】 C

【解析】 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于 F ，



$\because BC = 5$ ， $\triangle BCD$ 的面积为 5，

$\therefore DF = 2$ ，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ，

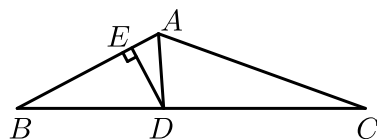
$\therefore DE = DF = 2$ 。

故选 C。

【标注】 【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性质定理

7. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， $S_{\triangle ABC} = 10$ ， $DE = 2$ ， $AC = 6$ ，则 AB 长是 ()。



A. 5

B. 4

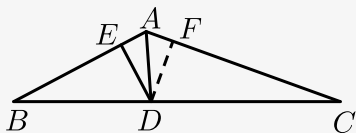
C. 3

D. 2

【备注】 面积相关问题， $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的高相等，求底边可先求其面积

【答案】 B

【解析】 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F ，



$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore DE = DF$,

而 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$$

$$= \frac{1}{2} DE (AB + AC) ,$$

$$\text{则有 } \frac{1}{2} \times 2(AB + 6) = 10 ,$$

解得 $AB = 4$.

故选 B .

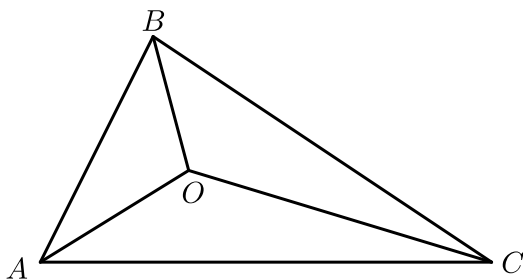
【标注】【知识点】角分线性质定理

【能力】 运算能力

栗子5

8. 如图, $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 长分别为 40、50、60. 其三条角平分线交于点 O , 则

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO} = \underline{\hspace{2cm}} .$$



【备注】 由距离相等得到边长比即为面积比

【答案】 4 : 5 : 6

【解析】 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D , 作 $OE \perp AC$ 于点 E , 作 $OF \perp BC$ 于点 F ,

$\therefore OA, OB, OC$ 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线,

$\therefore OD = OE = OF$,

$\therefore \triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 长分别为 40、50、60 ,

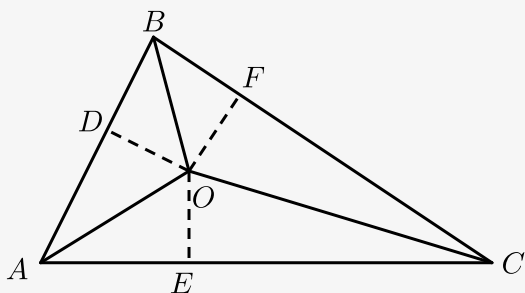
$\therefore S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO}$

$$= \left(\frac{1}{2} AB \cdot OD \right) : \left(\frac{1}{2} BC \cdot OF \right) : \left(\frac{1}{2} AC \cdot OE \right)$$

$$= AB : BC : AC$$

$$= 40 : 50 : 60$$

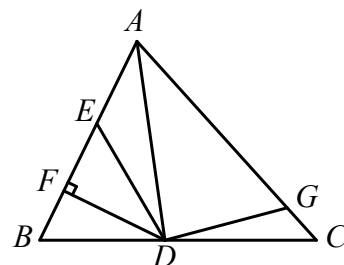
$$= 4 : 5 : 6 .$$



【标注】【知识点】角分线性性质定理

独步天下

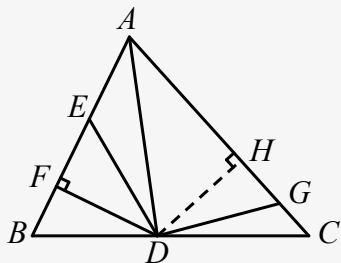
9. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ， $DE = DG$ ， $\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为60和38，则 $\triangle EDF$ 的面积为 _____ .



【备注】两次全等，题目有一定难度，可列方程求解

【答案】11

【解析】过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 H ，



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB$ ， $DH \perp AC$ ，

$\therefore DF = DH$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，

$$\begin{cases} DF = DH \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle ADH (\text{HL}),$$

$$\therefore S_{\text{Rt}\triangle ADF} = S_{\text{Rt}\triangle ADH},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 和 $\text{Rt}\triangle DGH$ 中,

$$\begin{cases} DE = DG \\ DF = DH \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEF \cong \text{Rt}\triangle DGH (\text{HL}),$$

$$\therefore S_{\text{Rt}\triangle DEF} = S_{\text{Rt}\triangle DGH},$$

$\therefore \triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为60和38,

$$\therefore 38 + S_{\text{Rt}\triangle DEF} = 60 - S_{\text{Rt}\triangle DGH},$$

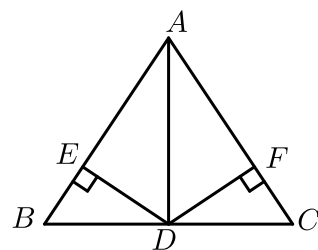
$$\therefore S_{\text{Rt}\triangle DEF} = 11,$$

故答案为: 11.

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

栗子6

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别是 E , F , 求证: $BE = CF$.



【备注】证明题, 需要规范学生的书写过程, 题目有一定的综合性

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because AB = AC$, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\because DE \perp AB, DF \perp AC,$$

$$\therefore DE = DF,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} BD = DC \\ DE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF (\text{HL}),$$

$$\therefore BE = CF.$$

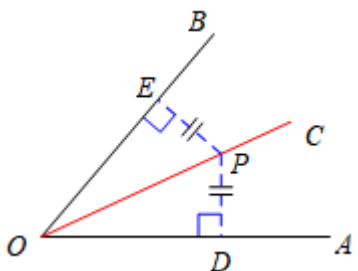
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】HL

【知识点】角分线性质定理

【知识点】全等三角形的对应边与角

三、角平分线的判定

判定	角的 <u>内部</u> 到角的两边的 <u>距离相等</u> 的点在角的平分线上 .
	【用符号语言表示】 $\because PD \perp OA, PE \perp OB, \underline{PD = PE}$ (已知) $\therefore \underline{OP \text{ 平分 } \angle AOB}$ (角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上)

【备注】【角的平分线的判定的证明】

证明：作射线 OP

$\because PD \perp OA, PE \perp OB$

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$

在 $Rt\triangle ODP$ 和 $Rt\triangle OEP$ 中

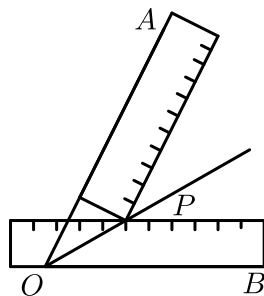
$$\begin{cases} OP = OP \\ PD = PE \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle ODP \cong Rt\triangle OEP$ (HL)

$\therefore \angle POD = \angle POE$, 即 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上 .

栗子7

11. 小明同学在学习了全等三角形的相关知识后发现，只用两把完全相同的长方形直尺就可以作出一个角的平分线．如图：一把直尺压住射线 OB ，另一把直尺压住射线 OA 并且与第一把直尺交于点 P ，小明说：“射线 OP 就是 $\angle BOA$ 的角平分线．” 他这样做的依据是 () ．

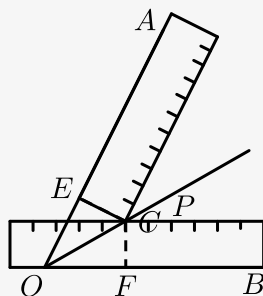


- A. 角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上
- B. 角平分线上的点到这个角两边的距离相等
- C. 三角形三条角平分线的交点到三条边的距离相等
- D. 以上均不正确

【备注】依据问题，需要学生把性质和判定的两句话分清楚，不要混淆

【答案】A

【解析】如图所示：



过两把直尺的交点 C 作 $CE \perp AO$ ， $CF \perp BO$ ，

$\because$ 两把完全相同的长方形直尺，

$\therefore CE = CF$ ，

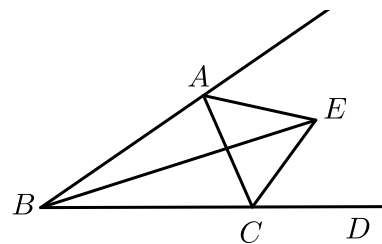
$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$ （角的内部到角的两边的距离相等的点在这个角的平分线上）。

故选A。

【标注】【知识点】角平分线判定定理

栗子8

12. 如图， $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角， $\angle BAC = 80^\circ$ ， $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 E ，连接 AE ，则 $\angle CAE$ 的度数是（ ）。



A. 35°

B. 40°

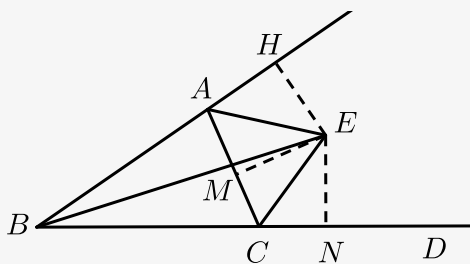
C. 50°

D. 55°

【备注】角平分线性质的综合，需要先判定AE为角平分线

【答案】C

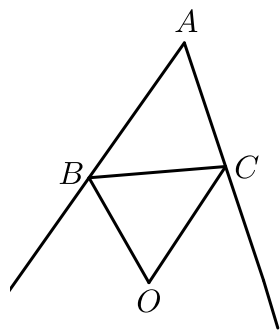
【解析】过 E 作 $EN \perp BD$ 于 N ， $EM \perp AC$ 于 M ， $EH \perp BA$ 交 BA 延长线于 H ，



$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle ACD$ ，
 $\therefore EH = EN$ ， $EM = EN$ ，
 $\therefore EH = EM$ ，
 $\therefore EH \perp BA$ ， $EM \perp AC$ ，
 $\therefore AE$ 平分 $\angle CAH$ ，
 $\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAH$ ，
 $\because \angle BAC = 80^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAH = 180^\circ - \angle BAC = 100^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAE = 50^\circ$ ．
 故选C．

【标注】【知识点】角平分线判定定理

13. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的两外角平分线的交点，下列结论：① $OB = OC$ ；②点 O 到 AB 、 BC 的距离相等；③点 O 到 $\triangle ABC$ 的三边的距离相等；④点 O 在 $\angle A$ 的平分线上．以上结论正确的个数是（ ）．



A. 1

B. 2

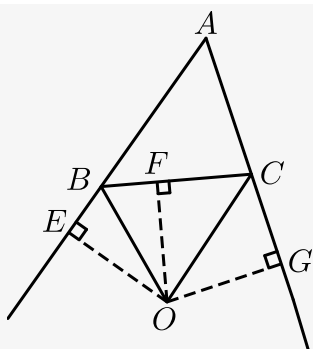
C. 3

D. 4

【备注】第12题的延伸，带学生总结一下各个结论

【答案】C

【解析】如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于 E ，作 $OF \perp BC$ 于 F ，作 $OG \perp AC$ 于 G ，



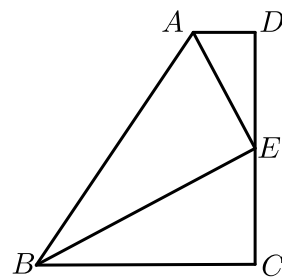
$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的两外角平分线的交点，
 $\therefore OE = OF, OF = OG$
 $\therefore OE = OF = OG$ ，
 $\therefore$ 点 O 在 $\angle A$ 的平分线上，故②③④正确，
 只有点 F 是 BC 的中点时， $BO = CO$ ，故①错误，
 综上所述，正确的是②③④。

【标注】【知识点】角分线性质定理

【知识点】角平分线判定定理

栗子9

14. 如图， $\angle D = \angle C = 90^\circ$ ， E 是 DC 的中点， AE 平分 $\angle DAB$ ， $\angle DEA = 28^\circ$ ，则 $\angle ABE$ 的度数为（ ）。



A. 28°

B. 31°

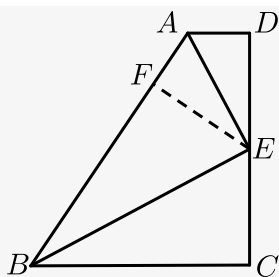
C. 56°

D. 62°

【备注】典型模型，常见辅助线为做垂直

【答案】A

【解析】过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F 点。

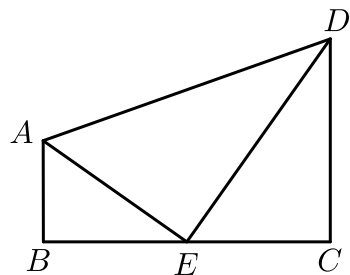


$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,
 $\therefore \angle BAE = \angle DAE$,
 $\therefore DE = FE$.
 $\because DE = EC$,
 $\therefore FE = EC$,
 $\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle AEB = 90^\circ$.
 $\because \angle AED = 28^\circ$,
 $\therefore \angle DAE = \angle BAE = 62^\circ$,
 $\therefore \angle ABE = 28^\circ$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性质定理

15. 如图, $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, E 是 BC 的中点, AE 平分 $\angle BAD$.



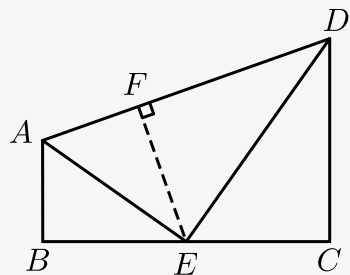
- (1) 求证: DE 平分 $\angle ADC$.
 (2) 求证: $AD = AB + DC$.

【备注】第14题的延伸, 可以给学生铺垫证明线段和差倍分的技巧

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 证明: 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F ,



$\because \angle B = 90^\circ$, AE 平分 $\angle DAB$,

$\therefore BE = EF$,

$\because E$ 是 BC 的中点 ,

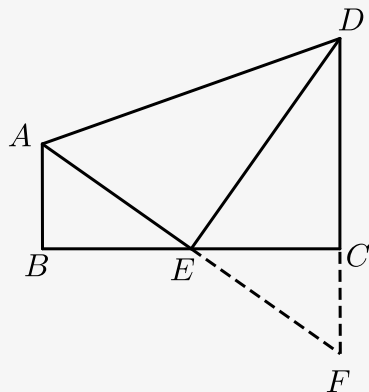
$\therefore BE = CE$,

$\therefore CE = EF$,

又 $\because \angle C = 90^\circ$, $EF \perp AD$,

$\therefore DE$ 是 $\angle ADC$ 的平分线 .

(2) 方法一 : 证明 : 延长 AE 交 DC 的延长线于 F ,



$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle F = \angle BAE$, $\angle FCE = \angle ABE$,

$\therefore \angle F = \angle DAE$,

$\therefore AD = FD$,

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$,

$\therefore \angle ADE = \angle FDE$,

$\because DE = DE$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FDE$ (AAS) ,

$\therefore AE = FE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE$ (AAS) ,

$\therefore CF = AB$,

$$\therefore FD = CF + DC ,$$

$$\therefore FD = AB + DC ,$$

$$\therefore AD = AB + DC .$$

方法二：由(1)有 $\angle B = \angle AFE = \angle DFE = \angle C = 90^\circ$,

$$\text{且 } BE = FE = CE ,$$

$$\text{又 } \because AE = AE , DE = DE ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AFE (\text{HL}) , \text{Rt}\triangle DFE \cong \text{Rt}\triangle DCE ,$$

$$\therefore AF = AB , DF = DC ,$$

$$\therefore AD = AF + DF = AB + DC .$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

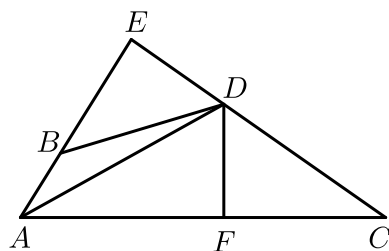
【知识点】角平分线判定定理

【知识点】角分线性质定理

【能力】推理论证能力

栗子10

16. 如图， $BE = CF$ ， $DE \perp AB$ 延长线于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，且 $\angle EBD = \angle C$ ，求证： AD 是 $\angle EAC$ 的平分线。



【备注】证明题，规范书写过程，可利用练习册对应的补充题目，多练习

【答案】证明见解析。

【解析】 $\because DE \perp AB , DF \perp AC ,$

$$\therefore \angle DEB = \angle DFC = 90^\circ ,$$

在 $\triangle DEB$ 与 $\triangle DFC$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle DEB = \angle DFC \\ BE = CF \\ \angle EBD = \angle C \end{cases} ,$$

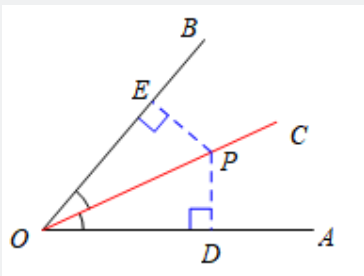
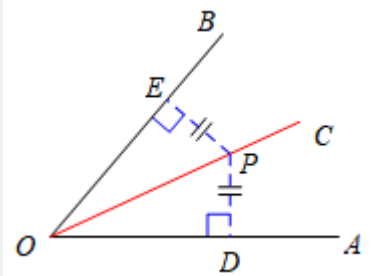
$$\therefore \triangle DEB \cong \triangle DFC (ASA)$$

$$\therefore DE = DF ,$$

$\because DE \perp AB, DF \perp AC,$
 $\therefore AD$ 是 $\angle EAC$ 的平分线.

【标注】【知识点】ASA

【归纳总结】

	角平分线的性质	角平分线的判定
图形		
已知	OP 平分 $\angle AOB$ $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E	$PD = PE$ $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E
结论	$PD = PE$	OP 平分 $\angle AOB$